



Control 7

P1. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ complejos unitarios tales que:

$$z_1 + z_2 = -u, \quad u \in \mathbb{C}$$

$$z_1 \cdot z_2 = v, \quad v \in \mathbb{C}.$$

- (a) (1.5 ptos.) Pruebe que $|u| \leq 2$ y que $|v| = 1$.
- (b) (1.5 ptos.) Pruebe que $\overline{z_1} + \overline{z_2} = -\frac{u}{v}$.
- (c) (1.5 ptos.) Pruebe que $u = \overline{u}v$.
- (d) (1.5 ptos.) Si los ángulos de la escritura polar de u y v , son φ y θ respectivamente, es decir

$$u = |u|e^{i\varphi} \text{ y } v = |v|e^{i\theta},$$

utilice (c) para probar que

$$\theta = 2\varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

P2. (a) (3 ptos.) Demuestre que las raíces de la ecuación de segundo grado $z^2 + z + 1 = 0$, son raíces cúbicas de la unidad distintas de 1.

- (b) (3 ptos.) Sean $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, un complejo dado, $n \geq 2$ y $\{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$ las raíces n -ésimas de z . Calcule

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z_k}.$$

16 de junio de 2007